Η Κβαντική Μηχανική σε λειτουργία

Γεώργιος Κουτσούμπας

ΕΜΠ

Κέρκυρα, Σεπτέμβρης 2014

1 Σεπτεμβρίου 2014

Συζευγμένοι ταλαντωτές

Θεωρούμε δύο μάζες m που κινούνται στην ίδια ευθεία και οι απομακρύνσεις τους από τη θέση ισορροπίας είναι οι x_1 και x_2. Μπορεί να δεί κανείς ότι οι εξισώσεις του Νεύτωνα για τις δύο μάζες είναι:

$$mx_1'' = -kx_1 + k(x_2 - x_1) = -2kx_1 + kx_2,$$
$$mx_2'' = -kx_2 - k(x_2 - x_1) = kx_1 - 2kx_2$$

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις είναι πεπλεγμένες, με την έννοια ότι στην εξίσωση για την επιτάχυνση του x_1 συμμετέχει στο δεξιό μέλος και το x_2 και αντιστρόφως. Όμως, αν προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη, θα προκύψουν οι:

$$m(x_1'' + x_2'') = -k(x_1 + x_2),$$

$$m(x_1'' - x_2'') = -3k(x_1 - x_2).$$

Αν ορίσουμε

$$x_A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \quad x_B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2),$$

οπότε και:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_A + x_B), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_A - x_B),$$

προκύπτουν οι δύο εξισώσεις:

$$x_A'' + \frac{k}{m}x_A = 0, \quad x_B'' + \frac{3k}{m}x_B = 0,$$

που είναι ασύζευκτες μεταξύ τους και οι λύσεις τους είναι γνωστές:

είναι εξισώσεις αρμονικού ταλαντωτή με συχνότητες

$$\omega_A^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_B^2 = \frac{3k}{m},$$

οπότε και:

$$x_A = c_A \cos(\omega_A t) + d_A \sin(\omega_A t), \quad x_B = c_B \cos(\omega_B t) + d_B \sin(\omega_B t),$$

όπου τα c_A, d_A, c_B, d_B είναι σταθερές ολοκλήρωσης, που προσδιορίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Αν $c_B = d_B = 0$, δηλαδή $x_B = 0$, θα έχουμε μια λύση με τη μοναδική συχνότητα ω_A. Τότε

$$x_1 = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[c_A \cos(\omega_A t) + d_A \sin(\omega_A t)].$$

Δηλαδή οι δύο μάζες κινούνται ομόρροπα με την ίδια συχνότητα ω_A. Αντίστοιχα, αν $c_A = d_A = 0$, δηλαδή $x_A = 0$, θα έχουμε μια λύση με τη μοναδική συχνότητα ω_B :

$$x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[c_B \cos(\omega_B t) + d_B \sin(\omega_B t)].$$

Δηλαδή οι δύο μάζες κινούνται αντίρροπα με την ίδια συχνότητα ω_B.

Όμως οι τύποι κίνησης που μόλις περιγράψαμε είναι εξαιρετικά ειδικές περιπτώσεις. Στη γενική περίπτωση **και οι δύο** συχνότητες συνεισφέρουν στην κίνηση, δίνοντάς της έναν περίπλοκο χαρακτήρα.

Παράδειγμα: Αν $c_A = c_B = \frac{F}{\sqrt{2}}$ και $d_A = d_B = 0$, οι λύσεις απλοποιούνται στις:

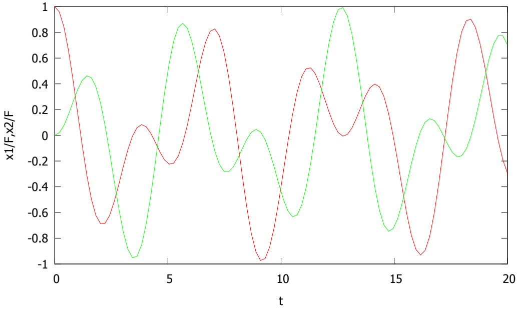
$$x_A = \frac{F}{\sqrt{2}} \cos(\omega_A t), \; x_B = \frac{F}{\sqrt{2}} \cos(\omega_B t).$$

Αυτές με τη σειρά τους συνεπάγονται ότι:

$$x_1 = \frac{F}{2}\{\cos(\omega_A t) + \cos(\omega_B t)\},$$

$$x_2 = \frac{F}{2}\{\cos(\omega_A t) - \cos(\omega_B t)\}.$$

Το σχήμα δείχνει μια ενδεικτική εικόνα της κίνησης των δύο μαζών.



Κβαντομηχανική: εισαγωγή

Η Κβαντομηχανική μπορεί να διατυπωθεί στη βάση μιάς εξίσωσης (του Schrödinger) της μορφής:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi.$$

Το $\hbar$ είναι η σταθερά του Planck, το ψ είναι η λεγόμενη κυματοσυνάρτηση, που μας δίνει όποια πληροφορία είναι δυνατή σχετικά με το σύστημα και το H λέγεται Χαμιλτονιανή.

Η Χαμιλτονιανή εκφράζει την ενέργεια του συστήματος. Αν ένα ελεύθερο σωματίδιο έχει ενέργεια $E = \frac{p^2}{2m}$, η εξίσωση

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi$$

λύνεται από την

$$\psi = Ne^{-\frac{iEt}{\hbar}}.$$

(Το N είναι μια σταθερά κανονικοποίησης).

Έστω τώρα ότι εξετάζουμε ένα σωματίδιο με πιθανές ενέργειες E_1, E_2. Η εξίσωσή του θα γραφτεί ως

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = E\psi.$$

Για $E = E_1$ η εξίσωση γράφεται:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} = E_1\psi_1,$$

ενώ για $E = E_2$ προκύπτει:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = E_2\psi_2.$$

Επομένως η κυματοσυνάρτηση θα παίρνει τις μορφές:

$$\psi_1 = N_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}, \ \psi_2 = N_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}.$$

Όλ' αυτά τα συνοψίζει κανείς χρησιμοποιώντας πίνακες. Γράφει τη Χαμιλτονιανή με τη μορφή

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}.$$

Φυσικά, μια τέτοια Χαμιλτονιανή πρέπει να δράσει σαν πίνακας πάνω σε μια στήλη. Η κυματοσυνάρτηση, λοπόν, γίνεται σπίνορας:

$$\psi \to \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}.$$

Οι εξισώσεις γράφονται, λοιπόν, σε μια πιο συμπαγή γραφή, με τη μορφή:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_1 & 0\\ 0 & E_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ειδικοί σπίνορες που η δράση της Χαμιλτονιανής πάνω τους είναι ιδιαίτερα απλή:

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = E_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή οι σπίνορες

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

αναπαράγουν τον εαυτό τους όταν δράσει επάνω τους η Χαμιλτονιανή.

Όμως για έναν γενικό σπίνορα αυτό δεν ισχύει:

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1\psi_1 \\ E_2\psi_2 \end{bmatrix}.$$

Αφού η Χαμιλτονιανή καθορίζει τη χρονική εξέλιξη, περιμένουμε ότι το σύστημα θα εξελίσσεται χρονικά μ' έναν περίπλοκο τρόπο. Πράγματι:

$$\begin{bmatrix} N_1 e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \\ N_2 e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \end{bmatrix},$$

συμπεριφορά που θυμίζει κάπως τους συζευγμένους ταλαντωτές.

Πάντως ένας αυθαίρετος σπίνορας μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι:

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \psi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \psi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

όπως, π.χ.,

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_A + \frac{1}{\sqrt{2}} x_B$$

στους συζευγμένους ταλαντωτές.

Το μέγεθος $|\psi_1|^2$ δίνει την πιθανότητα μια μέτρηση ενέργειας να δώσει την E_1. Αντίστοιχα, το μέγεθος $|\psi_2|^2$ δίνει την πιθανότητα μια μέτρηση ενέργειας να δώσει την E_2. Οι $E_1,\ E_2$ είναι τα μόνα δυνατά αποτελέσματα που μπορεί να προκύψουν από μιά μέτρηση της ενέργειας, οπότε υποχρεωτικά:

$$|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1.$$

Αυτή η σχέση λέγεται συνθήκη κανονικοποίησης.

Ένα βασικό φυσικό μέγεθος που μπορεί να υπολογιστεί μ' αυτά τα δεδομένα είναι η μέση τιμή της ενέργειας:

$$< E >= \frac{E_1 N_1 + E_2 N_2}{N_1 + N_2} = E_1 P_1 + E_2 P_2 = E_1 |\psi_1|^2 + E_2 |\psi_2|^2.$$

Η ίδια σχέση μπορεί να γραφτεί σε μια μορφή πιό εύκολα γενικεύσιμη:

$$< E >= \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}.$$

Η διαδικασία ανάπτυξης στη βάση των ιδιοδιανυσμάτων είναι γενική και ισχύει και όταν, για παράδειγμα, η Χαμιλτονιανή δεν είναι διαγώνια, αλλά έχει τη γενικότερη μορφή:

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & F \\ F & E_2 \end{bmatrix}.$$

Η συνταγή για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της ενέργειας θα ισχύει και σ' αυτήν την περίπτωση:

$$< E >= \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & F \\ F & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}.$$

Σπιν σε μαγνητικό πεδίο

Μεταπτωτική κίνηση

Ας θεωρήσουμε κλασικό σωματίδιο με μαγνητική ροπή $\vec{\mu} = -\gamma\vec{s}$, όπου $\vec{s}$ η στροφορμή του και γ μια σταθερά, σε μαγνητικό πεδίο B_0 κατά τον άξονα των z.

Στην κλασική Μηχανική η λύση της εξίσωσης

$$\frac{d < \vec{s} >}{dt} = \gamma < \vec{s} > \times \vec{B}_0$$

παριστάνει μια μετάπτωση περί τον z με συχνότητα $\omega_0 = \gamma B_0$.

Στην περίπτωση της Κβαντομηχανικής θεωρούμε ότι η στροφορμή είναι το σπιν του σωματιδίου. Ξέρουμε ότι το σπιν μπορεί να πάρει τις τιμές $\pm\frac{\hbar}{2}$.Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει κάποιος πίνακας, ο

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

με τις ιδιότητες:

$$s_z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ο s_z πρέπει να συμπληρωθεί με άλλους δύο, ώστε να καλύψουμε και τις τρεις διαστάσεις, οπότε:

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma},$$

όπου το διάνυσμα $\vec{\sigma}$ έχει ως συνιστώσες τους πίνακες του Pauli:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, για $\vec{B}_0 = B_0\hat{z}, \ \ \vec{\mu} = \gamma\vec{s}$, η Χαμιλτονιανή γράφεται:

$$H_0 = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}_0 = -\gamma B_0 s_z = \begin{bmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}.$$

Έχουμε θέσει

$$\omega_0 = \gamma B_0.$$

Το γ λέγεται **γυρομαγνητικός λόγος.** Ο γυρομαγνητικός λόγος είναι πολύ ενδιαφέρον μέγεθος στη Χημεία και στην Ιατρική Φυσική. Σε απλές περιπτώσεις μπορεί κανείς να τον υπολογίσει. Επί παραδείγματι, στην περίπτωση της τροχιακής στροφορμής ηλεκτρονίου μάζας m, μπορεί κανείς να δείξει ότι: $\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2mc}\vec{L}$. Αν και αυτή η σχέση είναι πολύ ειδική, ορισμένα ποιοτικά χαρακτηριστικά της εξακολουθούν να ισχύουν. Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό που επιζεί σε γενικότερες περιπτώσεις είναι ότι ο λόγος είναι αντιστρόφως ανάλογος της μάζας.

Οι εξισώσεις σε κβαντομηχανική εκδοχή είναι οι:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\begin{array}{c}\psi_1\\ \psi_2\end{array}\right] = H_0\left[\begin{array}{c}\psi_1\\ \psi_2\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}-\frac{\hbar\omega_0}{2} & 0\\ 0 & +\frac{\hbar\omega_0}{2}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\psi_1\\ \psi_2\end{array}\right]$$

Από κβαντομηχανικής πλευράς οι λύσεις των αντίστοιχων εξισώσεων

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\psi_1, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\psi_2.$$

είναι προφανώς οι:

$$\psi_1 = c_1\exp\left(+\frac{i\omega_0 t}{2}\right), \qquad \psi_2 = c_2\exp\left(-\frac{i\omega_0 t}{2}\right),$$

και παριστάνουν την μεταπτωτική κίνηση περί τον άξονα των z σε κβαντομηχανική διατύπωση.

Έστω τώρα ότι, εκτός από το πεδίο $\vec{B}_0$, κατά τον άξονα των z, εφαρμόζεται ένα περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο στο επίπεδο xy, πράγμα που γεννάει έναν πρόσθετο όρο στη Χαμιλτονιανή:

$$H' = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B} = -\frac{\gamma B \hbar}{2}[\sigma_x \cos(\omega t) - \sigma_y \sin(\omega t)]$$

$$= -\frac{\gamma B \hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα η ολική Χαμιλτονιανή θα είναι:

$$H = H_0 + H' = \begin{bmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & -\frac{\gamma B\hbar}{2} e^{+i\omega t} \\ -\frac{\gamma B\hbar}{2} e^{-i\omega t} & +\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις θα είναι:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = H\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & -\frac{\gamma B\hbar}{2} e^{+i\omega t} \\ -\frac{\gamma B\hbar}{2} e^{-i\omega t} & +\frac{\hbar\omega_0}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix},$$

δηλαδή:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\psi_1 - \frac{\gamma B\hbar}{2}e^{+i\omega t}\psi_2$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = -\frac{\gamma B\hbar}{2}e^{-i\omega t}\psi_1 + \frac{\hbar\omega_0}{2}\psi_2.$$

Τώρα μπορούμε να κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητών, ώστε να απαλλαγούμε από τα εκθετικά:

$$\psi_1 = \exp\left(+\frac{i\omega_0 t}{2}\right)\chi_1, \qquad \psi_2 = \exp\left(-\frac{i\omega_0 t}{2}\right)\chi_2$$

Επί πλέον, στο εξής υποθέτουμε ότι η συχνότητα ω του περιστρεφόμενου μαγνητικού πεδίου ισούται με τη συχνότητα Larmor, δηλαδή την ω_0. Είναι μια κατάσταση συντονισμού, που απλοποιεί τις πράξεις. Ανάλογα πράγματα μπορούν να γίνουν, αν $\omega \neq \omega_0$.

Με όλ′ αυτά υπ′ όψιν, οι δύο εξισώσεις απλοποιούνται και γίνονται:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi_1 = -\frac{\gamma B\hbar}{2}\chi_2, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\chi_2 = -\frac{\gamma B\hbar}{2}\chi_1$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη και χρησιμοποιώντας τη δεύτερη καταλήγουμε στην:

$$\chi_1'' + \left(\frac{\gamma B}{2}\right)^2 \chi_1 = 0$$

Η λύση της είναι γνωστή:

$$\chi_1 = \alpha \cos\left(\frac{\gamma B t}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{\gamma B t}{2}\right).$$

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι τέτοιες ώστε: $\alpha = 1,\ \beta = 0$, προκύπτει ότι:

$$P_1 = |\psi_1|^2 = |\chi_1|^2 = \cos^2\left(\frac{\gamma B t}{2}\right), \quad P_2 = 1 - P_1 = \sin^2\left(\frac{\gamma B t}{2}\right).$$

Υπολογίσαμε δηλαδή τις πιθανότητες να εξακολουθήσει το σπιν να βρίσκεται στην αρχική ή να μεταβεί στην άλλη κατάσταση.

NMR

Το σημαντικό είναι ότι, ξέροντας τα ω_0 και B_0 **μπορούμε να υπολογίσουμε τον γυρομαγνητικό λόγο:**

$$\gamma = \frac{\omega_0}{B_0}.$$

Πειραματικά, αυτό γίνεται πολύ εύκολα: Μεταβάλλουμε την συχνότητα ω του περιστρεφόμενου μαγνητικού πεδίου και κάποια στιγμή παρατηρούμε μια απότομη μεταβολή στην ισχύ τροφοδοσίας. Εκεί θα ισχύει η συνθήκη $\omega = \omega_0$ κι έτσι προσδιορίζεται η ω_0. Το B_0 είναι γνωστό, οπότε προκύπτει το γ.

Αν επιλέξουμε να εξετάσουμε τους πυρήνες του υδρογόνου, επιλέγουμε την αντίστοιχη περιοχή συχνοτήτων ω, που είναι μεγαλύτερη από τις αντίστοιχες των βαρύτερων πυρήνων: υπενθυμίζουμε τη σχέση για την τροχιακή στροφορμή $\vec{\mu}_L = -\frac{e}{2mc}\vec{L}$, η οποία δείχνει ότι, σ' αυτήν την περίπτωση, το $\gamma = -\frac{e}{2mc}$, άρα και η αντίστοιχη συχνότητα, είναι ποσότητες αντιστρόφως ανάλογες της μάζας.

Αν, τώρα έχουμε μια περίπλοκη χημική ένωση με διάφορα πρωτόνια (πυρήνες υδρογόνου), το κάθε πρωτόνιο συντονίζεται σε κάπως **διαφορετική συχνότητα** από τα υπόλοιπα. Ο λόγος είναι ότι το πεδίο που επικρατεί στην περιοχή του δεν είναι ακριβώς το B_0, αλλά κάποιο τοπικό πεδίο που επηρεάζεται π.χ. από τα ηλεκτρόνια, οπότε η συχνότητα συντονισμού είναι ελαφρώς διαφορετική από το ω_0. Αν, λοιπόν, ξέρουμε από πριν τη συχνότητα συντονισμού του υδρογόνου μέσα σε μια ομάδα (π.χ. $-COOH$) και ανακαλύψουμε αυτήν τη συχνότητα συντονισμού στις μετρήσεις μας, μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι μέσα στο δείγμα μας εμφανίζεται η συγκεκριμένη ομάδα ($-COOH$).

Μαγνητική τομογραφία (MRI)

Στη μετάπτωση των σπιν βασίζεται και η απεικονιστική μέθοδος της μαγνητικής τομογραφίας. Ο εξεταζόμενος τοποθετείται σε μαγνητικό πεδίο B_0 με μεταβλητή ένταση (συνήθως με σταθερή βαθμίδα), ώστε οι συχνότητες συντονισμού να είναι διαφορετικές από τομή σε τομή. Ο στόχος είναι να παίρνει κανείς χωριστή εικόνα για κάθε τομή αναφορικά με το περιβάλλον των πρωτονίων του νερού, που κυριαρχεί μέσα στον οργανισμό. Το ενδιαφέρον είναι ότι η συμπεριφορά του σπιν των πρωτονίων, εκτός από το ηλεκτρονιακό περιβάλλον τους, εξαρτάται και από τους γειτονικούς πυρήνες. Αυτοί με τη σειρά τους εξαρτώνται από την φυσιολογική κατάσταση του ιστού, με αποτέλεσμα να γίνονται αντιληπτές και απειροελάχιστες αλλαγές στους ιστούς, που αξιοποιούνται μετά από τους αρμόδιους γιατρούς.

Άτομο αμμωνίας
Ταλάντωση του ατόμου

NH_3 : Το N μπορεί να είναι είτε στην πάνω πλευρά του επιπέδου των τριών υδρογόνων (κυματοσυνάρτηση ψ_1) είτε στην κάτω πλευρά (κυματοσυνάρτηση ψ_2).

Αν δεν υπάρχει δυνατότητα να επικοινωνήσουν οι δύο καταστάσεις, οι κυματοσυναρτήσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = E_0\psi_1, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = E_0\psi_2$$

που έχουν τις αντίστοιχες λύσεις:

$$\psi_1 = c_1 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right], \psi_2 = c_2 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right].$$

Άτομο αμμωνίας
Ταλάντωση του ατόμου

NH_3 : Το N μπορεί να είναι είτε στην πάνω πλευρά του επιπέδου των τριών υδρογόνων (κυματοσυνάρτηση ψ_1) είτε στην κάτω πλευρά (κυματοσυνάρτηση ψ_2).

Αν δεν υπάρχει δυνατότητα να επικοινωνήσουν οι δύο καταστάσεις, οι κυματοσυναρτήσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = E_0\psi_1, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = E_0\psi_2$$

που έχουν τις αντίστοιχες λύσεις:

$$\psi_1 = c_1 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right], \psi_2 = c_2 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right].$$

Άτομο αμμωνίας

Ταλάντωση του ατόμου

NH_3 : Το N μπορεί να είναι είτε στην πάνω πλευρά του επιπέδου των τριών υδρογόνων (κυματοσυνάρτηση ψ_1) είτε στην κάτω πλευρά (κυματοσυνάρτηση ψ_2).

Αν δεν υπάρχει δυνατότητα να επικοινωνήσουν οι δύο καταστάσεις, οι κυματοσυναρτήσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = E_0\psi_1, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = E_0\psi_2$$

που έχουν τις αντίστοιχες λύσεις:

$$\psi_1 = c_1 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right], \psi_2 = c_2 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right].$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει μια (μικρή) δυνατότητα να επικοινωνούν οι δύο καταστάσεις. Αυτό, σε επίπεδο εξισώσεων, εκφράζεται ως:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = E_0\psi_1 - \frac{\hbar\omega}{2}\psi_2, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = -\frac{\hbar\omega}{2}\psi_1 + E_0\psi_2.$$

Οι εξισώσεις είναι πεπλεγμένες. Για να τις απεμπλέξει κανείς, προσθέτει και αφαιρεί:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 \pm \psi_2) = (E_0 \mp \frac{\hbar\omega}{2})(\psi_1 \pm \psi_2).$$

Ορίζοντας:

$$\psi_A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad E_A \equiv E_0 - \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\psi_B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2), \quad E_B \equiv E_0 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει μια (μικρή) δυνατότητα να επικοινωνούν οι δύο καταστάσεις. Αυτό, σε επίπεδο εξισώσεων, εκφράζεται ως:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = E_0\psi_1 - \frac{\hbar\omega}{2}\psi_2, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = -\frac{\hbar\omega}{2}\psi_1 + E_0\psi_2.$$

Οι εξισώσεις είναι πεπλεγμένες. Για να τις απεμπλέξει κανείς, προσθέτει και αφαιρεί:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 \pm \psi_2) = (E_0 \mp \frac{\hbar\omega}{2})(\psi_1 \pm \psi_2).$$

Ορίζοντας:

$$\psi_A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad E_A \equiv E_0 - \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\psi_B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2), \quad E_B \equiv E_0 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Έστω τώρα ότι υπάρχει μια (μικρή) δυνατότητα να επικοινωνούν οι δύο καταστάσεις. Αυτό, σε επίπεδο εξισώσεων, εκφράζεται ως:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = E_0\psi_1 - \frac{\hbar\omega}{2}\psi_2, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = -\frac{\hbar\omega}{2}\psi_1 + E_0\psi_2.$$

Οι εξισώσεις είναι πεπλεγμένες. Για να τις απεμπλέξει κανείς, προσθέτει και αφαιρεί:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1 \pm \psi_2) = (E_0 \mp \frac{\hbar\omega}{2})(\psi_1 \pm \psi_2).$$

Ορίζοντας:

$$\psi_A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_2), \quad E_A \equiv E_0 - \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$\psi_B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_2), \quad E_B \equiv E_0 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_A = E_A\psi_A, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_B = E_B\psi_B,$$

που έχουν τις αντίστοιχες λύσεις:

$$\psi_A = c_A \exp\left[-\frac{iE_A t}{\hbar}\right], \psi_B = c_B \exp\left[-\frac{iE_B t}{\hbar}\right].$$

καταλήγουμε στις εξισώσεις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_A = E_A\psi_A, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_B = E_B\psi_B,$$

που έχουν τις αντίστοιχες λύσεις:

$$\psi_A = c_A \exp\left[-\frac{iE_A t}{\hbar}\right], \psi_B = c_B \exp\left[-\frac{iE_B t}{\hbar}\right].$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_A + \psi_B)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{c_A \exp\left[-\frac{i(E_0 - \frac{\hbar\omega}{2})t}{\hbar}\right] + c_B \exp\left[-\frac{i(E_0 + \frac{\hbar\omega}{2})t}{\hbar}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right]\left\{c_A \exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right) + c_B \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)\right\}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right]\left\{c_A \exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right) - c_B \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)\right\}.$$

Αν, τώρα, ξέρουμε ότι, για $t = 0$, το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ψ_1, τότε: $c_A = c_B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, και

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \left\{\exp\left(+\frac{i\omega t}{2}\right) + \exp\left(-\frac{i\omega t}{2}\right)\right\}$$

$$= \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

Παρόμοια:

$$\psi_2 = i \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right] \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right).$$

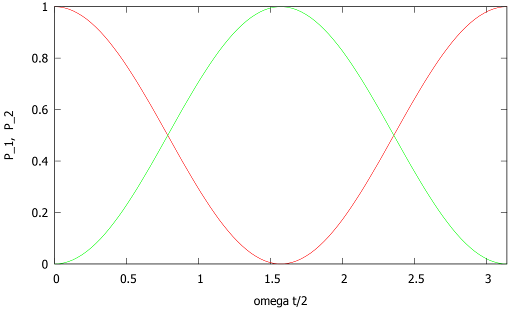
Δηλαδή η πιθανότητα της κατάστασης ψ_1 σε οποιονδήποτε χρόνο είναι:

$$P_1 = |\psi_1|^2 = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right),$$

ενώ της κατάστασης ψ_2 :

$$P_2 = |\psi_2|^2 = \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right).$$

Η γραφική παράσταση δείχνει την διακύμανση του συστήματος μεταξύ των δύο καταστάσεων.



Περιοδικό ηλεκτρικό πεδίο

Θεωρούμε το εξής σύστημα:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1 = [E_0 + p\mathcal{E}_0\cos(\omega t)]\psi_1 - \frac{\hbar\omega_0}{2}\psi_2,$$
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2 = -\frac{\hbar\omega_0}{2}\psi_1 + [E_0 - p\mathcal{E}_0\cos(\omega t)]\psi_2.$$

Για μικρά $\mathcal{E}_0$ και $\omega = \omega_0$ μπορούμε να βρούμε μια προσεγγιστική λύση:

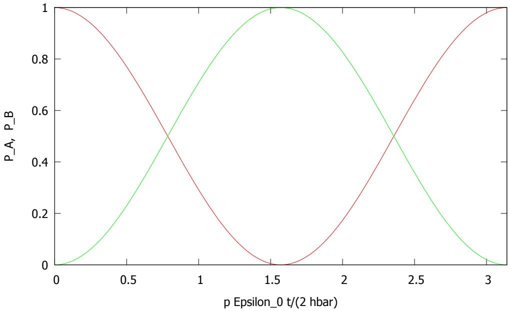
$$\psi_A = \left\{\alpha\cos\left(\frac{p\mathcal{E}_0 t}{2\hbar}\right) + \beta\sin\left(\frac{p\mathcal{E}_0 t}{2\hbar}\right)\right\}\exp\left[-\frac{i(E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2})t}{\hbar}\right]$$

$$\psi_B = \left\{i\beta\cos\left(\frac{p\mathcal{E}_0 t}{2\hbar}\right) - i\alpha\sin\left(\frac{p\mathcal{E}_0 t}{2\hbar}\right)\right\}\exp\left[-\frac{i(E_0 - \frac{\hbar\omega_0}{2})t}{\hbar}\right]$$

Αν υποθέσουμε ότι για $t = 0$ τα μόρια της αμμωνίας βρίσκονται στην κατάσταση ψ_A (με την υψηλότερη ενέργεια, δηλαδή την $E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2}$). Τότε $\alpha = 1, \ \beta = 0$ και οι πιθανότητες συναρτήσει του χρόνου θα είναι:

$$P_A = |\psi_A|^2 = \cos^2\left(\frac{p\mathcal{E}_0 t}{2\hbar}\right), \quad P_B = |\psi_B|^2 = \sin^2\left(\frac{p\mathcal{E}_0 t}{2\hbar}\right).$$

Το σχήμα είναι παρόμοιο με το προηγούμενο:



MASER αμμωνίας

Τα μόρια αερίου NH_3 που βρίσκονται στην υψηλή ενεργειακή στάθμη, την $E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2}$, μπαίνουν σε μια κοιλότητα, όπου επικρατεί χρονικά εξαρτημένο ηλεκτρικό πεδίο με την κατάλληλη συχνότητα: αυτήν που αντιστοιχεί στην ενεργειακή διαφορά

$$\left(E_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2}\right) - \left(E_0 - \frac{\hbar\omega_0}{2}\right) = \hbar\omega_0 .$$

Αν τα μόρια χρειάζονται χρόνο T για να διασχίσουν την κοιλότητα, μπορεί κανείς να κανονίσει ώστε:

$$\frac{p\mathcal{E}_0 T}{2\hbar} = \frac{\pi}{2}.$$

Τότε τα μόρια θα βγούν από την κοιλότητα έχοντας μεταπέσει στην κατάσταση με την χαμηλή ενέργεια, την $E_0 - \frac{\hbar\omega_0}{2}$. Δηλαδή το σύστημα των μορίων έχει χάσει ενέργεια, η οποία μεταφέρθηκε στον μηχανισμό παραγωγής του ηλεκτρικού πεδίου.

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το αέριο, αν διαβιβαστεί σε ηλεκτρικό πεδίο με την κατάλληλη συχνότητα, επάγονται μεταβάσεις από την υψηλότερη προς τη χαμηλότερη ενέργεια και η ενέργεια διαβιβάζεται στο ταλαντευόμενο πεδίο. Η αντιστροφή πληθυσμών μπορεί να επιτυγχάνεται με διάφορους τρόπους. Επίσης, στα LASER, τη θέση της κοιλότητας την παίρνουν δύο επίπεδοι καθρέφτες, που δημιουργούν στάσιμα κύματα.

Παράξενα μεσόνια

Θεωρούμε τώρα τα παράξενα μεσόνια K : Το K_0, που σχετίζεται με τα quark d και $\bar{s}$, καθώς και το $\bar{K}_0$, που σχετίζεται με τα quark $\bar{d}$ και s. Τα μεσόνια αυτά μετατρέπονται το ένα στο άλλο, άρα η Χαμιλτονιανή που τα χαρακτηρίζει είναι της μορφής:

$$H = \begin{bmatrix} E_0 & F \\ F & E_0 \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις γράφονται:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} K_0 = E_0 K_0 + F \bar{K}_0,$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \bar{K}_0 = E_0 \bar{K}_0 + F K_0.$$

Αν μετράμε τις ενέργειές μας από το E_0, δηλαδή αν θέσουμε:

$$K_0 \to K_0 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right], \quad \bar{K}_0 \to \bar{K}_0 \exp\left[-\frac{iE_0 t}{\hbar}\right],$$

οι εξισώσεις απλοποιούνται στις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K_0 = F\bar{K}_0, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\bar{K}_0 = FK_0.$$

Προσθαφαιρώντας κατά τα γνωστά και ορίζοντας τις νέες κυματοσυναρτήσεις:

$$K_S \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(K_0 + \bar{K}_0), \quad K_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(K_0 - \bar{K}_0),$$

βρίσκουμε τις καινούργιες εξισώσεις:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K_S = FK_S, \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}K_L = 0.$$

Οι λύσεις των εξισώσεων είναι, βέβαια οι εξής:

$$K_S = N_S \exp\left[-\frac{iFt}{\hbar}\right], \quad K_L = N_L.$$

Δηλαδή το K_L είναι αθάνατο! Το K_S διασπάται και χάνεται, γιατί το F είναι μιγαδικό:

$$F = \alpha - i\beta \Rightarrow K_S = N_S \exp\left[-\frac{i\alpha t}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{\beta t}{\hbar}\right]$$

Έστω τώρα ότι ξεκινάμε, για $t = 0$, μ' ένα K_0, οπότε $N_S = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $N_L = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$K_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[-\frac{i\alpha t}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{\beta t}{\hbar}\right], \quad K_L = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Από τις σχέσεις ορισμού των K_L, K_S μπορούμε να επιλύσουμε ως προς την $\bar{K}_0$:

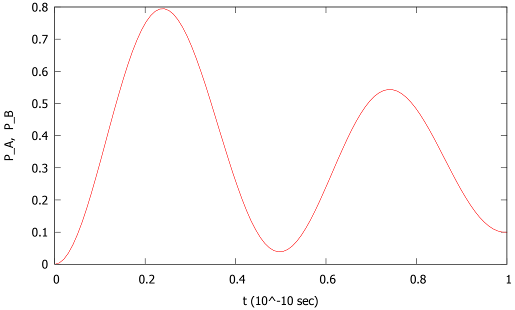
$$\bar{K}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_S - K_L) = \frac{1}{2}\left(\exp\left[-\frac{i\alpha t}{\hbar}\right] \exp\left[-\frac{\beta t}{\hbar}\right] - 1\right)$$

Άρα το μεσόνιο που ξεκίνησε ως K_0 μπορεί μετά από χρόνο t να ανιχνευθεί ως $\bar{K}_0$ με πιθανότητα:

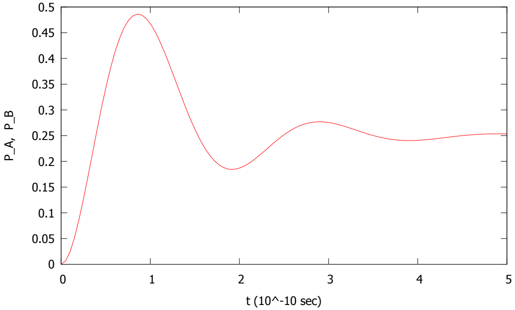
$$|\bar{K}_0|^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\exp[-\beta t]\cos(\alpha t) + \exp[-2\beta t])$$

Το πείραμα δίνει την τιμή $\beta = 10^{10} sec$, αλλά δεν λέει τίποτε σχετικά με την τιμή του α. Στα επόμενα δύο σχήματα, ακολουθώντας τον Feynman, δίνουμε τη γραφική παράσταση για τις δύο επιλογές: $\alpha = 4\pi\beta$ και $\alpha = \pi\beta$.

Σχήμα : Πιθανότητα μετατροπής σε $\bar{K}_0$, αν $\beta = 10^{10} sec,\ \alpha = 4\pi\beta$



Σχήμα : Πιθανότητα μετατροπής σε $\bar{K}_0$, αν $\beta = 10^{10} sec, \ \alpha = \pi\beta$



Να σημειώσουμε ότι η παραπάνω ανάλυση έγινε με την υπόθεση ότι η Χαμιλτονιανή είχε τα δύο μη διαγώνια στοιχεία ίσα. Αν τώρα ήταν της μορφής:

$$H = \begin{bmatrix} E_0 & F \\ G & E_0 \end{bmatrix},$$

πράγμα που θα σηματοδοτούσε παραβίαση της συμμετρίας CP, οι σχέσεις για τα K_S και K_L θα τροποποιούνταν στις:

$$K_S \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}[(1+\epsilon)K_0 + (1-\epsilon)\bar{K}_0],$$

$$K_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}}[(1+\epsilon)K_0 - (1-\epsilon)\bar{K}_0],$$

όπου:

$$\epsilon \equiv \frac{\sqrt{F}-\sqrt{G}}{\sqrt{F}+\sqrt{G}}$$

Το επισημαίνουμε, γιατί στην πραγματικότητα υπάρχει πράγματι παραβίαση της συμμετρίας CP και ο ακριβής ορισμός των K_S και K_L είναι ο προηγούμενος και όχι αυτός που χρησιμοποιήσαμε στην προσεγγιστική μας ανάλυση.